Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20
Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi
Esercitazione 10

Esercizio 1 Data la *funzione podio*

$$f(x) := \begin{cases} 2 & x \in [0,1), \\ 3 & x \in [1,2), \\ 1 & x \in [2,3], \end{cases}$$

si determini l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$F(x) := \int_0^x f(t)\, dt \qquad\qquad x \in [0,3].$$

Esercizio 2 A partire dalla definizione di integrale, si dimostri la catena di disuguaglianze

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\, dx \leq 4.$$

Sapete proporre stime più precise per il valore dell'integrale proposto?

Esercizio 3 Determinare le derivate delle seguenti funzioni

$$G(x) = \cos(x) \int_{-4}^{x} e^{-t^2}\, dt, \qquad H(x) = \left(\int_1^x e^{-t^2}\, dt\right)\left(\int_0^x \cos(t^3)\, dt\right), \qquad F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\, dt.$$

Esercizio 4 Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \left(e^{3x} - (x-2)^4\right)\, dx, \quad \int \left(\sqrt{x+3} - \frac{1}{x}\right)\, dx, \quad \int \frac{3}{1+2x^2}\, dx.$$

Esercizio 5 Calcolare l'area della regione

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Esercizio 6 Si studi il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{|s|}{1+|s|}\, ds \qquad x \in \mathbb{R}$$

Successivamente, si provi che F è lipschitziana, dispari e che non è derivabile due volte in $\mathbb{R}$.

Esercizio 7 Determinare le derivate delle seguenti funzioni

$$F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\, dt, \qquad G(x) = \cos(x) \int_{-4}^{x} e^{-t^2}\, dt, \qquad H(x) = \left(\int_1^x e^{-t^2}\, dt\right)\left(\int_0^x \cos(t^3)\, dt\right)$$

Esercizio 8 Calcolare

$$\int_0^2 \min\{t, t^{-1}\}\, dt, \qquad \int_0^{\pi} [1 + 2\sin(x)]\, dx$$

dove, nell'ultimo integrale, $[\cdot]$ indica la funzione parte intera.

Esercizio 9 Si determini il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato nel punto 0 della funzione integrale

$$\Phi(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt.$$

Quanto vale il polinomio di ordine 8 centrato nel punto 0 della stessa funzione?

Esercizio 10 Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_{-1}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{dove} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x<0, \\ e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e determinarne una rappresentazione esplicita.

Verificare che F è derivabile due volte e convessa in $\mathbb{R}$.

Esercizio 11 Sia $f \geq 0$ una funzione continua in $[0,1]$ tale che esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) > 1$. Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f^n(x)dx = +\infty.$$

Esercizio 12 Data $f(x) = \min\{3 - |2x-3|, 2\}$, ricavare una espressione esplicita per la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds, \text{ per } x \in [0,3].$$

Esercizio 13 Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzione continua, $g, h : [0,1] \to [0,1]$ derivabili. Si provi che la seguente funzione integrale è derivabile e si calcoli la sua derivata

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\,ds.$$

Esercizio 14 Calcolare

$$\int \tan(x)\,dx \qquad \int e^{5-2x}\,dx \qquad \int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\,dx \qquad \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{4+\sin(x)}dx \qquad \int_0^{\pi} \sin^3(x)\,dx \qquad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log(x)}$$

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Esercizio 15 Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^1 \left(x^4 + 5x^3 + 1\right)dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,dx, \qquad \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx,$$

$$\int_0^2 e^{-2x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{2x+1}{(x-1)^2}\,dx$$

Esercizio 16 Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e quindi integrabile) e sia F una sua primitiva che verifica $F(3) = 7$. Allora

1. $F(x) = \int_3^x f(t)dt + 2$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. La funzione F verifica $|F(x) - F(y)| \leq 3|x-y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (è Lipschitz di costante 3) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste almeno un punto $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - 7 = f(c)(x-3)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - f(x) = k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - f(x)x = k$ per ogni $x \in [0, 10]$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 17 Sia $I = \int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$. Allora

1. $I = 1 - \frac{2}{e}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $I = 1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $I > 2e$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $I > 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 18 Sia $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$. Allora

1. $I = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $I = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $I = \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $I < \sqrt{2}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 19 Sia $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Allora

1. $I_1 = \log(1 + x^2)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $I_1 = \arctan(x)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Facoltativo (a risposta aperta): Calcolare I_n al variare di $n \in \mathbb{N}$.